ZUSAMMENFASSUNG - MATHEMATIK GRUNDLAGEN

«In der Mathematik versteht man die Dinge nicht. Man gewöhnt sich nur an sie.» ~ John von Neumann

Kreienbühl Mika – Studierender Techniker HF System- & Netzwerktechnik mit Cyber-Security

Mika Kreienbühl
mika.kreienbuehl@student.ipso.ch

Inhalt

Übersicht Mathematik Grundlagen

Im Rahmen der Techniker HF an der IFA (ipso Bildung) werden im 1. Semester Mathematik Grundlagen erarbeitet, welche im Laufe der weiteren Weiterbildung wichtig sind.

Als Referenz dieser Zusammenfassung dienen die Unterrichtmaterialien, welche im Rahmen der Techniker HF im Herbst/Winter Semester 2021/22 an der IFA ausgehändigt wurden. Ausserdem werden die Notizen sowie selbst erarbeitete Informationen verwendet.

Fächerinfos

Schule	IFA, Bern
Lehrgang	Techniker HF System- & Netzwerktechnik mit Cyber-Security
Dozierender	Franco Sechi
Unterrichtszeitraum	02.2021 bis 03.2022

Arten von Zahlen

Die Zahlen, welche wir kennen, werden in verschiedene Arten von Zahlen eingeteilt. Dabei heissen die bekannten Zahlen reele Zahlen. Unterschieden wird grob in zwei Gruppen irrationale (I) und rationale Zahlen (Q). Weitere Zahlenarten sind unten in der Grafik ersichtlich:

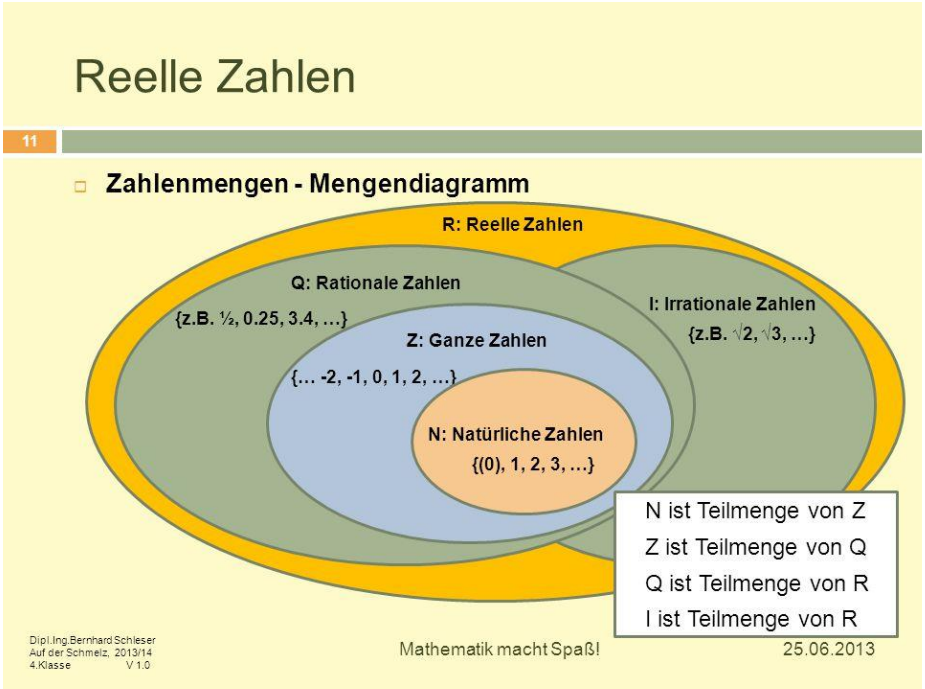

Figure 1 Reele Zahlen Grafik

Mathematische Gesetze

Assoziativgesetz

Das Assoziativgesetz trifft zu, wenn eine zweistellige Verbindung in deren Reihenfolge verschoben werden kann und sich daher deren Wert nicht ändert. Die Klammerung mehrerer assoziativer Verbindungen ist beliebig.

Beispiel

3 + (7 + 5) = (7 + 5) + 3

Distributivgesetz

Das Distributivgesetz sagt aus, dass man eine Zahl anstatt mit einer Summe auch mit einzelnen Summanden multiplizieren kann.

Beispiel

3 * (2 + 5) = 3 * 2 + 3 * 5 = 3 * 7 = 21

Kommutativgesetz

Das Kommutativgesetz besagt, dass man die Reihenfolge der Zahlen bei einer Addition oder einer Multiplikation vertauschen kann ohne, dass sich das Ergebnis verändert.

Beispiel

3 + 5 = 5 + 3

Klammeraufgaben

Strategie

1. Aufgabenstellung
2. Innerste Klammer auflösen
3. Term (Klammern) vereinfachen
4. Weitere Klammern auflösen
5. Zusammenfassen / Kontrolle

Multiplikation

Bei der Klammermultiplikation werden die Klammern mit den jeweilen Klammern ausgerechnet. Weiter werden die normalen mathematischen Regeln wie links nach rechts auflösen.

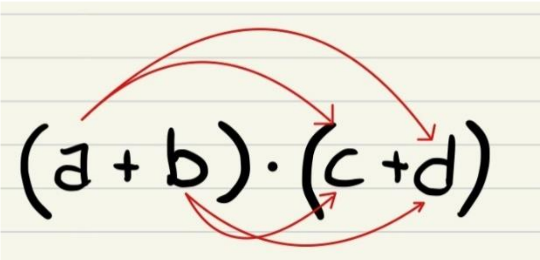

Figure 2 Klammermultiplikation

Bruchrechnen

Strategie

1. Aufgabenstellung
2. Term (Zähler) vereinfachen
3. Brüche wenn nötig erweitern (vlt. Klammern bilden)
4. Ausrechnen
5. Zusammenfassen & Klammern bilden
6. Klammern auflösen
7. Zusammenfassen

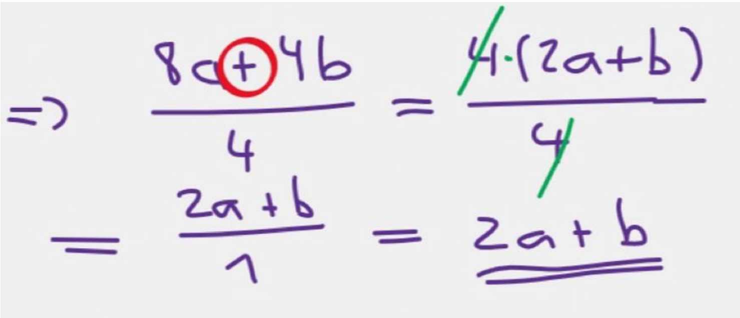

Figure 3 Beispiel

Dividieren

Strategie

Dividieren von mehreren Brüchen ist dadurch möglich, dass der zweite Bruch umgekehrt wird und der Bruch dann einfach multipliziert wird.

1/2 : 1/3 : 1/5 => 1/2 * 3/1 * 5/1 => 15/2

Im oben ersichtlichen Beispiel werden also die Zähler mit den Zählern und die Nenner mit den Nennern multipliziert nach Umkehrung des 2. & 3. Bruchs.

Potenzieren

Potenzen können addiert bzw. subtrahiert werden. Damit dies jedoch möglich ist, müssen diese gleich sein, also denselben Exponenten aufweisen. Ist dies der Fall, kann nach Distributivgesetz die Potenz ausgeklammert und der Koeffizient gebildet werden. Sind die Potenzen nicht gleich, so kann nicht zusammengefasst werden.

Beispiel

Exponenten sind gleich: $5a^2 + 4a^2 – 2a^2 = (5 + 4 – 2)\ a^2 = 7a^2$ => Zusammenfassen möglich

Exponenten sind unterschiedlich: $8a^4 + 4a^3 = 8a^4 + 4a^3$ => Zusammenfassen nicht möglich

Potenzregeln

1. Potenzregel

Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basen beibehält.

$a^n * a^m = a^{n+m}$
$3^2 * 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$

2. Potenzregel

Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die basen beibehält.

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$

3. Potenzregel

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.

$a^n * b^n = (ab)^n$
$5^2 * 3^2 = (5*3)^2 = 15^2 = 225$

4. Potenzregel

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält.

$a^n : b^n = (a:b)^n$
$4^3 : 2^3 = (4:2)^3 = 2^3 = 8$

5. Potenzregel

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält.

$(a^n)^m = a^{nm}$
$(2^3)^4 = (2)^{3*4} = 2^{12} = 4096$

Radizieren

Wurzeln können addiert bzw. subtrahiert werden. Dies ist allerdings nur möglich, sofern die Wurzeln gleich sind. Dann kann nach de Distributivgesetz die Wurzel ausgeklammert und die Summer der Koeffizienten gebildet werden. Sind die Wurzeln nicht gleich, kann man nicht Zusammenfassen.

Beispiel

$5\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = (5+4-2)\sqrt{a} = 7\sqrt{a}$ => Zusammenfassen möglich

$6\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[3]{a} = 5\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[3]{a}$ => Zusammenfassen nicht möglich

$\sqrt[3]{8} = 2 => 2^3 = 8$

$\sqrt[5]{32} = 32^{1/5}$

1. Wurzelregel

Der Wurzelexponent «n» und die Potenz «M» werden zusammengefasst, indem der Wurzelexponent «n» in eine Potenz umgewandelt und anschliessend die 5. Potenzregel angewendet wird.

$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{1/n} = a^{m/n}$

$\sqrt[2]{2^4} = (2^4)^{1/2} = 2^{4/2} = 2^{2/4} = 2^2 = 4$

2. Wurzelregel

Man zieht aus einer Wurzel die Wurzel, indem man die Wurzelexponenten miteinander multipliziert; «n» und «m» werden dementsprechend multipliziert.

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3*2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

3. Wurzelregel

Zwei Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden multipliziert, indem man die Radikanden miteinander multipliziert und aus dem Produkt die Wurzel zieht.

$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[2]{4} * \sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{36} = 6$

4. Wurzelregel

Zwei Wurzelterme mit gleichen Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die Radikanden dividiert und den erhaltenen Quotienten radiziert.

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$\frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[4]{\frac{256}{16}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Logarithmen

Logarithmen sagen aus hoch wie viel (Exponent) etwas (Basis) gerechnet werden muss, dann man ein gewisses Ergebnis erhält.

Beispiel

$Log_{10}1000$; Hoch wie viel muss 10 gerechnet werden, dass 1000 herauskommt.

$Log_2(64) \Rightarrow 2^x = 64$

$$X = \frac{\log 64}{\log 2} = \frac{1.8062}{0.3010} = 6$$

Lineare Gleichungen

Strategie

1. Aufgabenstellung
2. Klammer auflösen
3. Zusammenfassen pro Seite
4. +/- Rechnen mit X
5. +/- Rechnen mit dem Rest
6. Dividieren, dass nur noch X
7. Kontrolle (Resultat bei X einsetzen)

Bruchgleichung

Strategie

1. Aufgabenstellung
2. KgV definieren & Brüche erweitern
3. Bruchgleichung mit KgV multiplizieren
4. Zusammenfassen auf beiden Seiten
5. Gleichungsumstellung, so dass X auf einer Seite isoliert ist
6. X alleinestehend

Wurzelgleichungen

Strategie

1. Aufgabenstellung
2. Wurzelausdruck auf einer Seite isolieren
3. Gleichung potenzieren
4. Gleichung umstellen, X isolieren
5. Gleichung nach X berechnen

Gleichungssysteme

Gleichungssysteme sind Systeme welche zwei Unbekannten haben welche zu ermitteln sind.
Bei zwei Unbekannten ist immer die Voraussetzung, dass zwei Gleichungen vorhanden sind, ansonsten ist die Ermittlung der Werte nicht möglich.
Dabei gibt es mehrere Verfahren diese Unbekannten zu ermitteln.
Diese Verfahren werden nachfolgend erläutert und mit Beispielen ergänzt.

Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren handelt es sich um das Vorgehen, wo die Gleichung nach eine Variabel aufgelöst wird z.B. nach X. Das Resultat dieser Gleichung wird dann in die zweite Gleichung eingesetzt und so z.B. Y ermittelt.

Beispiel

I) $X + 2y = 10$
II) $2x + 3y = 17$

Im ersten Schritt wird I) nach X aufgelöst. Also -2y gerechnet. Ergibt: $x = 10 - 2y$
Der Wert von X wird dann in II) eingesetzt;
$2(10 – 2y) + 3y = 17$
Anschliessen wird nach Y aufgelöst;
$20 – y = 17 = y =3$

Wird als Y dann 3 eingesetzt in einer der Gleichungen, so kann man nach 4 auflösen und erhält die Lösungsmenge $L = \{4|3\}$

Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren werden die beiden Gleichungen nach derselben Variabel aufgelöst und anschliessend werde die Terme einander gleichgesetzt.

Beispiel

I) $X + 2y = 10$ -> $X = 10 – 2y$
II) $2x + 3y = 17$ -> $X= 8.5 – 1.5y$

Es folgt das gleichsetzen:
$10 – 2y = 8.5 – 1.5y$
$1.5 = 0.5y$

Die ergibt anschliessend für die Variabel Y den Wert 3

Dieser wird wieder in eine der Gleichung als Y eingesetzt und die Gleichung wird nach X aufgelöst.

$L = \{4|3\}$

Lineare Funktionen

Lineare Funktionen sind Gleichungen, welche in der grafischen Darstellung ein linearer Verlauf aufzeigen. Dabei sind lineare Funktionen immer nach demselben Muster aufgebaut:
y = mx + n

Wobei Y den Wert der Y-Achse definiert und X den Wert der X-Achse.
M beschreibt den Anstiegswinkel der Funktion und N beschreibt den Versatz. Versatz bedeutet so viel wie «bei welchem X-Wert kreuzt die Funktion die Y-Achse.

Beispiel

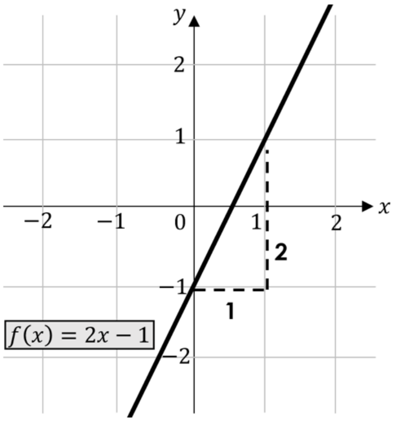

Figure 4 Beispiel Lineare Funktionen

Im oben ersichtlichen Beispiel ist klar ersichtlich, dass ein Anstiegswinkel von 2 besteht, sowie die Y-Achse bei X-Wert -1 gekreuzt wird.

Nullstelle berechnen

Um die Nullstelle zu berechnen, also um z.B. die Frage «Wann kreuzt die Funktion die X-Achse?» zu beantworten.

Strategie

1. Die andere Variable auf 0 setzen
2. Die Gleichung nach der gesuchten Variabel auflösen

Beispiel

Y = 0.5x + 2.5
0 = 0.5x +2.5
-0.5x = 2.5
-x = 5
x = -5

Schnittpunkt zweier linearer Funktionen berechnen

Strategie

1. Beide Funktionsgleichungen gleichsetzen
2. Gleichung nach X auflösen
3. X in eine der beiden Funktionen einsetzen und Y berechnen.

Beispiel

Y = 150x +100
Y = 100x + 1000

150x + 100 = 100x +1000
50x = 900
X = 18

Y = 150 (18) +100
Y = 2700 + 100
Y = 2800

S = {18|2800}

Anstiegswinkel berechnen

Um den Anstiegswinkel der linearen Funktion zu ermitteln braucht man die Hilfe der Tangenten Funktion. Es wird die Gegenkathete / Ankathete gerechnet und anschliessen mit der tan-Funktion berechnet.

Die Formel dazu heisst $\tan \propto = \frac{m}{1}$ bzw. $\propto = \tan^{-1} m$

Beispiel

Y = 2.5
X = 5

$$\propto = \tan^{-1} \frac{2.5}{5} = \tan^{-1} 0.5 = 26.57\ Grad$$

Potenz- & Exponentialfunktionen

Potenzfunktion

Eine Potenzfunktion ist eine Funktion, bei welcher die Funktionsvariabel mit einem oder mehreren Exponenten versehen ist. Ist bei einer Potenzfunktion der Exponent N = 1 so ist es eine lineare Funktion. Ist der Exponent n = 2 so ergibt sich eine parabel (blau) und ist n kleiner als 1 und grösser als 0 so ergibt sich eine neilsche Parabel (grün).

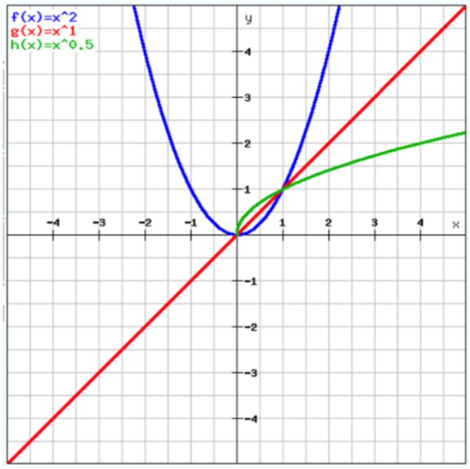

Figure 5 Potenzfunktionen

Ist n jedoch positiv und gerade so ergibt sich eine parabelähnliche Funktion (blau). Ist n = positiv und ungerade so ergibt sich eine umgeklappte parabelähnliche Funktion (grün).

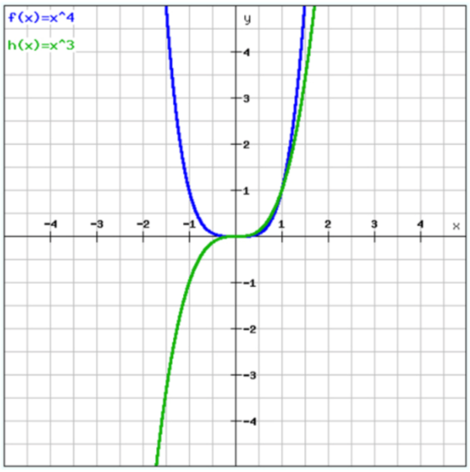

Figure 6 Potenzfunktionen 2

Ist n = negativ und gerade ergeben sich zwei Hyperbeln im 1. & 2. Quadrant (blau), bilden also eine Symmetrie bezogen auf die Y-Achse. Ist n hingegen = negativ & ungerade so ergeben sich zwei Hyperbeln im 1. & 3. Quadrant (rot), bilden also eine Symmetrie bezogen auf den Ursprung.

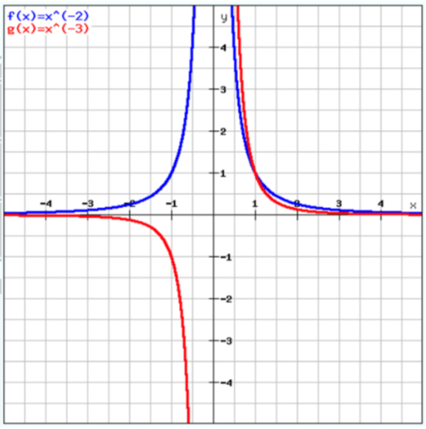

Figure 7 Potenzfunktionen 3

Beispiel

$Y = 4x^3 - 2x^2$

Quadratische Funktion

Eine Quadratische Funktion ist eine Potenzfunktion welche mit dem Exponenten 2 und eventuell dem Exponenten 1 versehen ist

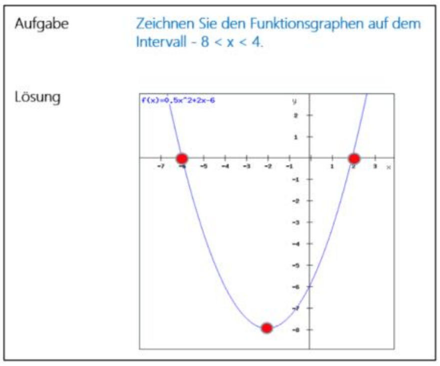

Figure 8 Quadratfunktionen

Beispiel

Y = $3x^2 + 4x – 5$

Nullstellen

Um bei einer quadratischen Funktion die Nullstellen zu ermitteln wird folgende Formel verwendet.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wobei im Beispiel: Y = $3x^2 + 4x – 5$

A = $3x^2$

B = 4x

C = 5

Ist.

Um die Anzahl Schnittpunkte mit der X-Achse zu berechnen, ist der Term unter der Wurzel der Formel zu berechnen. Ist der Term:

- negativ, so schneidet die Funktion die X-Achse nicht
- null, so schneidet die Funktion die X-Achse nur mit dem Scheitelpunkt
- positiv, so schneidet die Funktion an zwei Punkten

Scheitelpunkt

Um die X-Koordinate des Scheitelpunkt zu berechnen wird folgende Formel verwendet

$$x_S = \frac{-b}{2a}$$

Um anschliessend die Y-Koordinate zu berechnen, kann der X-Wert in die quadratische Gleichung eingesetzt werden.

Beispiel

Y = $3x^2 + 4x – 5$

Exponentialfunktion

Eine Exponentialfunktion ist eine Funktion bei welcher die Funktionsvariabel selbst als Exponent auftritt.

Beispiel

$Y = 5^x + 6$

Quellen

https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fslideplayer.org%2Fslide%2F2344415%2F&psig=AOvVaw2XlWGBROFBgd7x9HfQNZ2t&ust=1649259446823000&source=images&cd=vfe&ved=0CAoQjRxqFwoTCKCbrreg_fYCFQAAAAAdAAAAABAJ (Reele-Zahlen Grafik)

https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.studyhelp.de%2Fonline-lernen%2Fmathe%2Flineare-funktionen%2F&psig=AOvVaw03WmI58RcxVkdowfXNnKRa&ust=1649276117465000&source=images&cd=vfe&ved=0CAsQjhxqFwoTCPCa5Mve_fYCFQAAAAAdAAAAABAD (Beispiel Lineare Funktionen)